

Algorytm arytmetyczny

Sito Eratostenesa

Czyli jak znaleźć liczby pierwsze

Przygotowała Marzena Lesińska-Wardawy

Spis treści:

- # Postać Eratostenesa i jego rola w nauce
 - # Zasada i przykład działania algorytmu
 - # Liczby pierwsze i ciekawostki
 - # Powtórzenie
 - # Co zapamiętać
-

ERATOSTENES Z CYRENY


(ok. 275 – ok. 194 p.n.e.)



grecki filozof, astronom, matematyk i geograf; zajmował się także filologią, historią i muzyką; od 236 roku p.n.e. zarządzał Biblioteką Aleksandryjską; pierwszy dokonał pomiaru długości południka ziemskiego, wyznaczył kąt nachylenia ekliptyki do równika niebieskiego; pozostawił dzieło astrologiczne: *Calasterismi* — opis konstelacji; zachowały się fragmenty dzieła *Geographica*, w którym dał podstawy naukowego traktowania geografii; z osiągnięć mat. jest znane tzw. sito Eratostenesa; zachowały się także fragmenty jego utworów poetyckich.

Postać Eratostenesa w geografii

2200 lat temu Eratostenes na jednym ze zwojów papirusu przeczytał, że w mieście Syene (obecnie Asuan w Egipcie) co roku dokładnie 21 czerwca w południe pionowe paliki i kolumny świątyn przestają rzucać cień, a na dnie głębokiej studni widać odbicie słońca. Słońce jest więc wtedy dokładnie w zenicie, czyli prostopadle nad ziemią. I cóż z tego? Eratostenes był ciekawy, czy w Aleksandrii, mieście leżącym dalej na północ, w tym samym momencie kolumny i pionowe paliki też nie rzucają cienia. Rzuciły. Dzięki temu i prostemu rozumowaniu Eratostenes udowodnił, że Ziemia jest okrągła (pierwszy wspomniał o tym Pitagoras prawdopodobnie obserwując cień Ziemi na Księżycu). Co więcej obliczył kąt, pod jakim w Aleksandrii pada cień i najął człowieka, który zmierzył krokami odległość między oboma miastami (ok. 800 km). W innej wersji posłużył się karawaną. Mając te dane obliczył z błędem zaledwie kilku procent średnicę i obwód Ziemi.

- 
-
- # Około roku 200 p.n.e grecki matematyk Eratostenes podał algorytm na znajdowanie liczb pierwszych. Nazwa pochodzi od sposobu, w jaki są one znajdowane. Wszystkie liczby po kolei **przesiewa się** - usuwane są spośród nich wszystkie wielokrotności danej liczby z początku zakresu (przeszukiwanego przedziału).
-

Zasada „sita Eratostenesa”

- ✦ Eratostenes z Cyreny podszedł do rozwiązania w następujący sposób - zamiast sprawdzać podzielność kolejnych liczb naturalnych przez znalezione liczby pierwsze, **zapropozował wyrzucanie ze zbioru liczb naturalnych będących wielokrotnościami kolejnych liczb, które nie zostały wcześniej wyrzucone.** To, co zostanie, będzie zbiorem liczb pierwszych, które nie posiadają innych dzielników jak 1 i samą siebie. Metoda ta została nazwana sitem Eratostenesa i jest najszybszą metodą wyszukiwania liczb pierwszych w ograniczonym zbiorze.
-

Przykład działania algorytmu

- # Odnajdziemy za pomocą sita Eratostenesa wszystkie liczby pierwsze z zakresu od 2 do 30.
- # Zapisujemy kolejno wszystkie liczby w tabeli.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Wykluczamy liczby podzielne przez 2

- # Teraz bierzemy pierwszą liczbę z tabeli (2) i począwszy od następnej (3) dzielimy przez nią wszystkie kolejne liczby. Te, które są przez nią podzielne wykreślamy z niej. Krócej – wyrzucamy wszystkie wielokrotności liczby 2 poza nią samą.
- # W ten sposób pozbywamy się wszystkich liczb parzystych większych od 2.

2	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Wykluczamy podzielne przez 3 i 5

Bierzemy kolejną liczbę (**3**) i wyrzucamy jej wielokrotności albo inaczej mówiąc- dzielimy przez nią pozostałe liczby począwszy od następnej (od **5**, bo 4 już jest wykreślone). Jeśli dzielą się bez reszty przez 3– wyrzucamy.

Podzielne wykreślamy z tabeli.

2	3	5	7		11	13		17	19		23	25		29
---	---	---	---	--	----	----	--	----	----	--	----	----	--	----

Kolejną liczbą w tabeli jest 5. Postępujemy jak poprzednio:

2	3	5	7		11	13		17	19		23			29
---	---	---	---	--	----	----	--	----	----	--	----	--	--	----

Zatrzymanie działania algorytmu

W tym momencie możemy zakończyć nasze poszukiwania. Algorytm "mówi", że kolejne wykreślenia należy powtarzać nie dalej jak do liczby będącej zaokrąglonym w dół **pierwiastkiem zakresu** (30). Albo inaczej mówiąc ostatnia liczba, której wielokrotności wyrzucamy, ma być mniejsza lub równa pierwiastkowi granicy zakresu. U nas jest to: $\text{sqrt}(30)=5,4772255\dots$,

po zaokrągleniu w dół otrzymujemy 5. Liczby podzielne przez 5 już usunęliśmy, zatem w tabeli zostały już tylko liczby pierwsze.

Sqrt to oczywiście pierwiastek...

Skuteczność algorytmu

Skuteczność działania algorytmu ocenia się na podstawie jego **poprawności** uzyskiwanych wyników oraz ograniczenia czynności wykonywanych w trakcie do niezbędnego minimum.

W algorytmie wyszukiwania liczb pierwszych metodą Sita Eratostenesa nie występuje nigdzie potrzeba dzielenia. Wyznaczając wielokrotności wykonujemy jedynie **proste dodawanie**, które komputer realizuje bardzo szybko. Z tego powodu prezentowany algorytm czasowo jest najszybszym algorytmem rozwiązującym zadanie wyszukiwania liczb pierwszych.

Liczby pierwsze – które to...

■ **Liczby pierwsze** - to liczby naturalne, które posiadają tylko 2 dzielniki (liczbę **1 i samą siebie**), np.: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59,

■ Pozostałe to:

■ **liczby złożone** - to liczby naturalne, które posiadają więcej niż dwa dzielniki, np.: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, ... 27, 30.

■ Liczby **0 i 1** nie należą ani do liczb pierwszych, ani do złożonych.

Liczby pierwsze – historia kości...

W latach 60 ubiegłego wieku w Afryce znaleziono kości liczące ponad 25000 lat - z wyrytymi na nich korbami. Na jednej z nich (kość z Ishango) karby układają się w liczby 11, 13, 17, 19. Są to liczby pierwsze. Wymieniona kość stanowi drugie najstarsze na Ziemi znalezisko matematyczne i można ją sobie obejrzeć w muzeum brukselskim na ulicy Rue Vautier 29-B-1000, około 100 metrów od Parlamentu Europejskiego.



Ciekawostki

- # Obecnie za pomocą super szybkich komputerów można znaleźć gigantyczne liczby pierwsze.
 - # W Internecie odbywa się "Wielkie Internetowe Poszukiwanie Liczb Pierwszych Mersenne'a" (GIMPS).
 - # Liczba pierwsza $2^{6972593}-1$ (odkryta 1 czerwca 1999 roku) ma ponad 2 mln cyfr, dokładnie 2 098 960.
 - # Jest ona 38 z kolei tzw. liczbą Mersenne'a.
-

Ciekawostki – c.d.

Największą znaną dotąd liczbą pierwszą jest liczba: $2^{13466917}-1$. Rekordzistkę odkryto 14 listopada 2001 roku. Liczba ta składa się z 4 053 946 **cyfr!**

Milion ma 7 cyfr!!! Powyższa liczba ma ponad 4 miliony CYFR!!!

Co więcej, liczba ta należy do tzw. liczb Mersenne'a (jest to 39 liczba pierwsza Mersenne'a).

Odkrycie zostało dokonane w ramach wspomnianego wyżej programu GIMPS, w którym obliczeń dokonywały wspólnie pracujące w Internecie komputery ponad 130 tysięcy badaczy-ochotników, zaprzęgając do poszukiwań ponad 200 tysięcy komputerów PC.

Pamiętać należy, jaka była moc przerobowa ponad 20 lat temu, a jaka jest dziś...

Dziwne liczby pierwsze

- # Liczba **11111111111111111111111** złożona z 23 jedynek jest pierwsza.
 - # Istnieją liczby pierwsze złożone z kolejnych cyfr np.: **23, 67, 4567, 23456789, 1234567891, 1234567891234567891234567891.**
 - # W dwóch ostatnich liczbach cyfry występują w tak zwanym rosnącym porządku cyklicznym, tzn. po kolei, z tym że po **9** może być **0** lub **1**. Trudniej trafić na liczby pierwsze z malejącym porządkiem cyklicznym: **43, 10987, 76543 i 1987.**
-

Duże liczby pierwsze...

Liczba **31415926535897932384626433832795028841** zestawiona z początkowych **38** cyfr rozwinięcia dziesiętnej liczby π jest pierwsza.

Liczba **73939133** nie tylko jest pierwsza, ale liczby otrzymane z niej przez kolejne obcinanie cyfr od prawej też są pierwsze: **7393913, 739391, 73939, 7393, 739, 73, 7**.

I jeszcze raz

Prześledźmy jeszcze raz działanie algorytmu na większym przedziale liczb.

Zakres i granica

Zakres 1 – 100.

Pierwiastek ze 100 = 10.

Będziemy wyrzucać wielokrotności liczb mniejszych lub równych 10.

Wyszukiwanie liczb pierwszych z przedziału od 1 do 100.

Mimo zaproponowania bardzo prostego algorytmu do dnia dzisiejszego matematyka nie zna lepszego sposobu na uzyskanie liczb pierwszych.

Prześledźmy ideę Eratostenesa na przykładzie.

Przypuśćmy, że chcemy znaleźć wszystkie liczby pierwsze wśród liczb od 1 do 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Rozpoczynamy przesiewanie liczb

- # **1** nie jest liczbą pierwszą,
- # Kolejna liczba to **2**.
Wykreślamy wszystkie liczby **większe od dwóch** będące wielokrotnością liczby 2.
- # Program komputerowy może dodając przyśpieszyć swoje działanie – wykona dodawanie szybciej niż dzielenie w trakcie szukania liczb podzielnych przez (w tej chwili) 2.

2	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49
51	53	55	57	59
61	63	65	67	69
71	73	75	77	79
81	83	85	87	89
91	93	95	97	99

Usuwamy wielokrotności trójki.

- # Najmniejszą liczbą jest teraz liczba **3** (jest to liczba pierwsza - gdyby nią nie była, to dzieliłaby się przez 2, ale wtedy byłaby wykreślona).
- # Skreślamy teraz z listy wszystkie liczby większe od 3 i jednocześnie podzielne przez 3.

```
2 3 5 7
11 13 17 19
23 29
31 35 37
41 43 47 49
53 55 59
61 65 67
71 73 77 79
83 85 89
91 95 97
```

Odsiewamy kolejne wielokrotności.

- ✦ Najmniejszą liczbą na liście jest liczba 5. Jest to liczba pierwsza (argumentacja jak poprzednio). Skreślamy teraz wszystkie liczby większe od 5 i podzielne przez 5.
- ✦ Najmniejszą liczbą na liście jest liczba 7. Jest ona liczbą pierwszą. Wykreślamy wszystkie jej wielokrotności. A oto efekt odsiewu:
- ✦ **Tak właśnie ustaliliśmy liczby pierwsze mniejsze od 100-u.**

```
2 3 5 7
11 13 17 19
23 29
31 37
41 43 47
53 59
61 67
71 73 79
83 89
97
```

Źródła:

„Algorytmy” – Maciej M. Sysło. WSiP, Warszawa 1997.
(dostępna w Bibliotece szkolnej)

Oraz strony:

- http://free.polbox.pl/f/flasher/eh_cieka.html
 - http://encyklopedia.pwn.pl/20172_1.html
 - <http://www.algorytm.cad.pl/Algorithms/61-70/algorithm67.html>
 - <http://www.i-lo.tarnow.pl/edu/inf/alg/primes/pages/007.htm>
 - <http://ux1.math.us.edu.pl/~szyjewski/FAQ/liczby/pierwsze.htm>
 - <http://www.wszpwn.com.pl/files/programy-komp/sito/er-lic-p.htm>
 - <http://portalwiedzy.onet.pl/89071,haslo.html>
-

Co należy zapamiętać?

Imię Eratostenes,

**nazwę algorytmu i do czego służy,
zasadę działania i jak długo
wyrzucamy wielokrotności.**

Różnicę między liczbami pierwszymi a złożonymi i to, że 0 i 1 nie są ani złożone, ani pierwsze.

Dziękuję za uwagę
